

原稿の内容に関するご連絡先（2021/12/2現在）

中村 仁 電気通信大学

J. Nakamura, The University of Electro-Communications

E-Mail: Jin.nakamura (at) uec.ac.jp

(at) の部分を@に替えてください

訂 正

まぐね13巻4号に掲載の連載講座第1回に以下の通り誤りがありました。
お詫び申し上げます、訂正いたします。

p. 197 左コラム 12 行目

(誤) 磁極

(正) 磁気モーメント

初等連載講座

磁気と磁性

第1回 磁気モーメントとマクスウェル方程式

Magnetic Moment and Maxwell's Equations

溝口 正

T. Mizoguchi

Classical and quantum mechanical concepts required to describe magnetic moments and magnetism are introduced. The first is the electron spin, which is the intrinsic angular momentum of electrons that is fully understood only with quantum mechanics. The second is the physical quantities and laws of classical electromagnetism, such as magnetic moment, \mathbf{m} , magnetic field, \mathbf{H} , vector potential, \mathbf{A} , magnetic flux density, \mathbf{B} , and Maxwell's equations.

1.0 序

天然磁石は有史以前から知られていたと思われるが、これが羅針盤に應用されて人類の活動する世界は一挙に拡大した。電流のまわりに磁場ができることをエルステッドが発見してから、アンペール、ファラデーらの実験をマクスウェルがまとめあげ、古典電磁気学がつくられた。その背景のもとに磁性物理学は、物質の量子力学的理解によって大きく進展した。この章ではミクロな立場から理解を深めながら、古典電磁気学の間を平均化した見方を再検証していく。

1.1 電子のスピン角運動量

電子は質量 $m_e \cong 9.109 \times 10^{-31}$ kg, 負の素電荷 $-e \cong -1.602 \times 10^{-19}$ C をもった粒子として知られているが、その位置と運動量の成分の間には $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \cong 6.6261 \times 10^{-34}$ J s などの不確定性関係がある。この電荷がクーロンの法則に始まる電磁気学の主役を演ずるが、電子は同時に磁気モーメントの自然単位を担っている。この磁気モーメントは電子のもつ固有の角運動量、スピン角運動量に付随して現れてくる。スピン角運動量はスピンベクトル \mathbf{s} の $\hbar = h/2\pi \cong 1.055 \times 10^{-34}$ J s 倍で、 $\hbar \mathbf{s}$ である。スピンベクトルは空間のある方向を向いたベクトルとして s_x, s_y, s_z の3成分をもつが、それぞれの成分が量子力学における演算子となっている。この演算子はスピン関数に作用する。電子の状態を表すには、軌道関数のほかに、スピンの状態を表すこのスピン関数を組み合わせる必要がある。電子はフェルミ統計にしたがうフェルミ粒子であるから、一つの状態を占める電子はたかだか一つであるというパウリの原理に従う。このときの状態を規定するのが軌道関数とスピン関数の組み合わせであることは重要な意味をもつ。電子のスピン状態は2種類だけで、これを+, - または矢印で \uparrow (up), \downarrow (down) と表すこともあるが、スピン関数を軌道関数と同じような形で表せば、この関数の引数となるスピン変数

は、二つの状態に対応した2値しかない。通常 s_z の固有値 $+1/2, -1/2$ をスピン変数にとって、スピン関数を

$$\alpha\left(+\frac{1}{2}\right) = 1, \alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\beta\left(+\frac{1}{2}\right) = 0, \beta\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{2}$$

と書くことができる。このとき演算子 s_z に対する固有方程式は量子力学の定石に従い

$$s_z \alpha = \frac{1}{2} \alpha, s_z \beta = -\frac{1}{2} \beta \tag{3}$$

である。このとき空間の z 方向がスピンの量子化軸に選ばれたことになる。

この2種類のスピン関数に対し2成分の基本ベクトルをあて

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

としてもよい。もし α, β を式(4)のように2成分のベクトルで書けば、スピン演算子を

$$s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_z \tag{5}$$

と2行2列のマトリックスで表し、通常の行列の計算を行えば式(3)が得られる。ここで $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{s}$ と定義されるパウリ演算子の z 成分である。

三つのスピン演算子 s_x, s_y, s_z は互いに可換ではない。ということは、 z 軸を量子化軸に選んで式(4)のように固有状態を決めたとき、 s_y, s_x を独立に定めることはできない。これらの間には次の交換関係がある。

$$\begin{aligned} [s_x, s_y] &:= s_x s_y - s_y s_x = i s_z \\ [s_y, s_z] &:= s_y s_z - s_z s_y = i s_x \\ [s_z, s_x] &:= s_z s_x - s_x s_z = i s_y \end{aligned} \tag{6}$$

これらの交換関係を満たすためには s_x, s_y を次のようにおけばよい。

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_x \quad (7)$$

$$s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_y$$

このように、 s_x, s_y, s_z のマトリックスが全く異なった表現となるのは、 z 軸を量子化軸に選んだことに依存している。それでは空間のどの方向を z 軸に選ぶのがよいのだろうか。 z 軸の方向は任意に選んで差し支えない。しいて言えば、問題が最も容易に扱える方向を選ぶのがよいといえる。たとえば空間に磁場が存在していれば、通常その方向を z 軸に選ぶ。そうすればゼーマンエネルギーを s_z の固有値で指定できる。

s_x, s_y を組み合わせる

$$s_+ := s_x + is_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$s_- := s_x - is_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表される昇降演算子を定義しておくると便利である。

これらは

$$s_+ \alpha = 0, \quad s_+ \beta = \alpha \quad (9)$$

$$s_- \alpha = \beta, \quad s_- \beta = 0 \quad (10)$$

の結果を与える。新しく演算子

$$s^2 := s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{1}{2} (s_+ s_- + s_- s_+) + s_z^2 \quad (11)$$

を定義しよう。この演算子に対しては

$$s^2 \alpha = \frac{1}{2} \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha = \frac{3}{4} \alpha \quad (12)$$

$$s^2 \beta = \frac{1}{2} \beta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta = \frac{3}{4} \beta \quad (13)$$

となるから、スピン関数 α, β はともに式(11)で定義された演算子 s^2 の固有関数となっており、しかも、その固有値はともに $3/4$ である。すなわち演算子 s_z の α に対する固有値が $1/2$ 、 β に対する固有値が $-1/2$ のとき、演算子 s^2 の固有値は、スピン量子数 $s=1/2$ として、 $s(s+1) = 1/2((1/2)+1) = 3/4$ となっている。

s_z というのはスピンベクトル \mathbf{s} の z 方向の成分、すなわち単位ベクトル \hat{z} とスピンベクトルの内積 $\mathbf{s} \cdot \hat{z} = s_z$ のことである。空間の任意の方向を向いた単位ベクトルを \hat{u} とするとき、スピン演算子の \hat{u} 方向の成分に対する固有値 λ と、固有ベクトル、すなわちスピン関数 χ を求めてみよう。固有方程式は

$$(\mathbf{s} \cdot \hat{u}) \chi = (s_x \hat{u}_x + s_y \hat{u}_y + s_z \hat{u}_z) \chi = \lambda \chi \quad (14)$$

であり、このときの固有ベクトルを2成分のベクトル

$$\chi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

とおく。 \hat{u} は実空間における古典的な単位ベクトルであり、その成分を極座標で書けば

$$\hat{u}_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad \hat{u}_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad \hat{u}_z = \cos \theta \quad (16)$$

である。 s_x, s_y, s_z の行列を代入して式(14)を書けば

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_2 \sin \theta \cos \varphi - ia_2 \sin \theta \sin \varphi + a_1 \cos \theta \\ a_1 \sin \theta \cos \varphi + ia_1 \sin \theta \sin \varphi - a_2 \cos \theta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

となる。これより連立方程式

$$(\cos \theta - 2\lambda) a_1 + [\sin \theta \exp(-i\varphi)] a_2 = 0 \quad (18)$$

$$[\sin \theta \exp(i\varphi)] a_1 - (\cos \theta + 2\lambda) a_2 = 0 \quad (19)$$

が意味のある解をもつ条件として、行列式

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - 2\lambda & \sin \theta \exp(-i\varphi) \\ \sin \theta \exp(i\varphi) & -\cos \theta - 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

が成り立たなければならない。すなわち

$$4\lambda^2 - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4\lambda^2 - 1 = 0 \quad (21)$$

であるから、固有値 λ は

$$\lambda = +\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad (22)$$

である。それぞれの固有値に対し、比 a_2/a_1 は

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\cos \theta - 1}{-\sin \theta \exp(-i\varphi)} = \tan \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) \quad (23)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\cos \theta + 1}{-\sin \theta \exp(-i\varphi)} = -\cot \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) \quad (24)$$

となる。スピン関数の規格化条件

$$(\alpha^*, \alpha^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \quad (25)$$

を考慮すると、それぞれの固有値に対するスピン関数(固有ベクトル)は

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta - \pi}{2} \\ \sin \frac{\theta - \pi}{2} \exp(i\varphi) \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。このように \hat{u} の方向を量子化軸としても、二つの

固有値 $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ と、二つのスピン関数 χ_+ と χ_- が得られた。

\hat{u} の方向を逆転 ($\theta \rightarrow \theta - \pi$) すると χ_+ と χ_- が入れ替わることがわかる。

$\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$ とおけば \hat{u} は x 方向を向くから, x 方向のスピ関数は

$$\chi_x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

となる. すなわち スピ関数 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を同じ重みで重ね合わせた形となっている. 反対方向のスピ関数を重ねてもスピが消えるわけではなく, x 方向を向いて存在しているのである. ちなみに $-x$ 方向を向いたスピ関数は $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi$ において

$$\chi_{-x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

y 方向を向いたスピ関数は $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$ において

$$\chi_y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

となる.

スピ偏極ベクトル \mathbf{P} は古典的な実空間におけるベクトルで, パウリの演算子

$$\sigma = 2\mathbf{s} \quad (31)$$

の期待値として定義される. すなわち

$$\mathbf{P} = \langle \chi | \sigma | \chi \rangle \quad (32)$$

であるから, χ として式(26)を代入すれば

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \\ &= \sin \theta \cos \varphi \\ P_y &= -i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \\ &= \sin \theta \sin \varphi \\ P_z &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta \end{aligned} \quad (33)$$

となり, スピ偏極の方向は \hat{u} の方向であることが示される.

1.2 磁気モーメント

一般に電流 I の流れる閉回路上の位置ベクトルを \mathbf{R} とすれば, この閉電流の磁気モーメントは

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{\text{閉回路}} \mathbf{R} \times d\mathbf{R} \quad (34)$$

と表される. これが古典電磁気学における磁気モーメントの定義といえる.

電子が半径 r の円を描いて回っているとしよう. その角速度を ω とすれば, 電流

$$I = -e(\omega/2\pi) \quad (35)$$

が, 面積 $S = \pi r^2$ の閉回路の縁を流れていると見ることができる. ここで

$$IS = -\frac{1}{2} e\omega r^2 \quad (36)$$

を一定に保ちながら I を大きくし $S \rightarrow 0$ の極限を考えれば, 局在化した磁気モーメント

$$\mathbf{m} = \lim_{S \rightarrow 0} IS \hat{n} \quad (37)$$

を得る. 通常そこにベクトル \mathbf{m} に相当する矢印を描く. 磁気モーメントの大きさ $|\mathbf{m}|$ は IS で与えられ, 単位は A m^2 で表される. 磁気モーメントの方向を決める \hat{n} は閉電流の面に垂直な単位ベクトルであり, その向きは電流の向きに回る右ねじの進む向きと定義する.

対称性の議論はこの定義に戻って考える必要がある. とくに, 鏡映変換, たとえば, $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$ に対しては, Fig. 1 のように鏡映面に垂直な磁気モーメントの成分は方向を変えず, 平行成分は逆転する. また, 時間の向きを逆にする変換 $t \rightarrow -t$ を行うと, 電流の向きが逆転するか

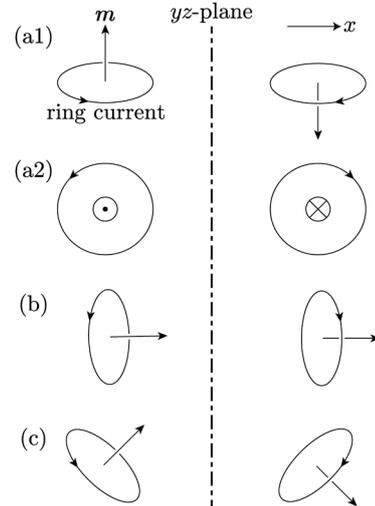


Fig. 1 Direction change of the magnetic moment, \mathbf{m} , by reflection with a mirror parallel to the yz -plane. Accompanying coordination transformation is $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$. (a1) & (a2) \mathbf{m} parallel to the yz -plane, (b) \mathbf{m} perpendicular to the yz -plane, and (c) in general.¹⁾

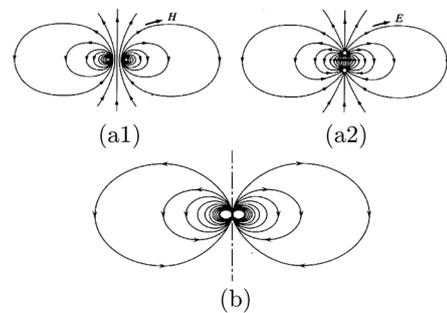


Fig. 2 Comparison of electric and magnetic fields produced by various sources. (a1) Magnetic field by a small closed current loop, (a2) electric field by a pair of plus & minus electric charges (electric dipole moment), and (b) magnetic field by a magnetic dipole moment.²⁾

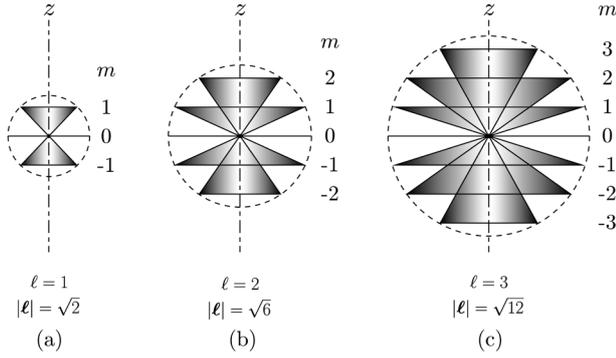


Fig. 3 Schematic drawing of orbital the angular momentum, ℓ , with vectors. (a) $\ell=1$, (b) $\ell=2$, and (c) $\ell=3$, where ℓ and m are the azimuthal and magnetic quantum numbers, respectively.³⁾

ら、磁気モーメントの方向も逆転する。この変換を時間反転と呼ぶ。磁性原子を含む結晶の対称性を扱うとき、これらのことに注意しなければならない。

磁気モーメントは閉電流で定義されているから、当然まわりに磁場をつくる。Fig. 2に小さな閉電流のつくる磁場(a1)と、正負の電荷の対がつくる電場(a2)の力線を示した。前者では磁力線が閉電流を貫いて下から上に向かっていているが、後者では電荷の間の力線が上から下と反対方向を向いている。閉電流が小さい極限をとればこの違いがわからなくなり、磁気モーメントのつくる磁場と、電気双極子のつくる電場と同様な空間分布 (Fig. 2(b)) となる。だからといって、磁気モーメントを磁荷の双極子と誤解してはならない。磁極を電荷のように正負の磁荷に分けようとしても不可能で、単独な磁荷は存在が確かめられたことはない。磁気モーメントの定義に戻れば、一つの閉電流の表と裏の関係なのである。

電子の質量を m_e と書けば、この円運動による角運動量の大きさは

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m_e |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = m_e \omega r^2 \quad (38)$$

となるが、量子力学によるとこの大きさは \hbar の整数倍に量子化されている。軌道角運動量を $\hbar \ell$ と書けば、ベクトル ℓ の z 成分、 ℓ_z の固有値は整数値となる。ベクトル ℓ の模式的な様子を Fig. 3 に示した。軌道角運動量の大きさと軌道磁気モーメント μ_{orb} の大きさを比較すれば、式(36)より

$$\begin{aligned} \mu_{\text{orb}} &= -\frac{1}{2} e \omega r^2 \hat{\mathbf{n}} = -\frac{e}{2m_e} m_e \omega r^2 \hat{\mathbf{n}} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \ell \\ &=: -\mu_B \ell \end{aligned} \quad (39)$$

の関係がある。電子のもつ電荷 $-e$ は負であるから電子の回る向きと磁気モーメントを定義した閉電流の向きは逆になるので、 μ_{orb} と ℓ の方向は反対となる。ここで

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \cong 9.274 \times 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (40)$$

はボーア磁子とよばれ、磁気モーメントのマイクロな自然単位である。磁気モーメントの値を μ_B に対する比で表せば、人為的な単位系によらないで普遍的に用いることができる。

このようにして、古典的な閉電流の極限の概念として導入された磁気モーメントと、マイクロな角運動量の関係が導かれた。有限な軌道角運動量に対してこのような軌道磁気モーメントは現実存在が確認されている。ところが軌道角運動量を持たない $\ell=0$ の電子が磁気モーメントをもっていることが、さまざまな実験において観測されている。

スピン角運動量に付随する磁気モーメント

$$\mu_{\text{spin}} = -g\mu_B \mathbf{S} \quad (41)$$

が磁束密度 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ の磁場の中に置かれると、磁場の方向を z 方向として

$$E = -\mu_0 \mu_{\text{spin}} \cdot \mathbf{H} = \mu_0 g \mu_B S_z H \quad (42)$$

のゼーマンエネルギーをもつ。

式(41)で現れた因子 g は、ディラックの電子論によれば

$$g = 2 \quad (43)$$

であることが導かれる。電磁場との相互作用を補正項として取り込めば $g = 2.0023$ となるが、通常2として不都合はない。スピン演算子の量子化軸方向の成分 s_z の固有値は $\pm 1/2$ であるから、電子固有のスピンに付随しているスピン磁気モーメントの大きさは、磁気モーメントの自然単位1ボーア磁子である。電子は素電荷 $-e$ とともに、 $1\mu_B$ の磁気モーメントをもっている。これが磁性の出発点である。原子核の回りを電子が取り巻いて原子ができ、原子が結合して物質ができる。物質の中の原子がどのような磁気モーメントを担っているかは次回で説明する。

1.3 磁 場

エルステッドが磁針の動きによって電流のまわりに発生する場を発見した歴史的経緯に基づき、磁場の強さ \mathbf{H} を導入しよう。式(42)をみると、磁気モーメント μ_{spin} に共役な(スカラー積がエネルギーの次元となる)示強変数は $\mu_0 \mathbf{H}$ である。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ J m}^{-1} \text{ A}^{-2}$ という定数が現れるのは、磁場 \mathbf{H} の中で電流が受ける力によって電流の単位(アンペア, A)を定めたときの定義に由来する。国際単位系(SI)では、間隔 $a = 1 \text{ m}$ の互いに等しい平行な直線電流間にはたらく単位長さ当たりの引力が $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ となるような電流の大きさを1 Aと定義している。

Fig. 4に示すように、 x 方向に流れる直線電流 I_0 から y 方向に a だけ離れた位置における磁場は、アンペールの法則により z 方向を向き、その大きさは $H = I_0 / (2\pi a)$ である。 I_0 に平行な直線電流 I が単位長さ当たりに受ける力 F は I と \mathbf{H} のベクトル積に比例する。その比例定数を μ_0 とおけば、力は $-y$ 方向、すなわち引力となり

$$F = \mu_0 I \times H = \mu_0 I \hat{\mathbf{x}} \times H \hat{\mathbf{z}} = -\mu_0 I \frac{I_0}{2\pi a} \hat{\mathbf{y}} \quad (44)$$

となる。ここで、 I は方向まで含めて電流を表すベクトルである。 $I_0 = I = 1 \text{ A}$, $a = 1 \text{ m}$, $F = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ の値を(44)に代入すれば

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ J m}^{-1} \text{ A}^{-2} \quad (45)$$

という定数が得られる。磁場の強さ H の単位は A/m であるが、この単位で測ると実験室で扱う磁場の数値が大きな桁数となって不便である。そこで μ_0 をかけて $\mu_0 H$ として扱うと都合がよい。SIにおける $\mu_0 H$ の単位は T (テスラ) であり、 $T = Jm^{-2} A^{-1}$ である。本書では $\mu_0 H$ を、磁場を表す示強変数として積極的に用いる。アンペアという電流の単位が完全に普及した今日、 μ_0 という煩わしい値をかけて $\mu_0 H$ を用いなければならないのはやむをえないとすべきであろう。

1.4 ベクトルポテンシャルと磁気モーメント

時間変化のない定常状態では、電荷保存の法則より電流は必ず閉電流となる。電流の単位を定義した直線電流というのは、この閉電流を大きくした極限といえる。あるいは測定点が閉電流上の一部に近接して、閉電流全体ではなく、その一部を近似的に直線と見ているといえる。

電流の周りに生じた磁場には、電流密度を \mathbf{J} としてアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (46)$$

が成り立つ。ここで磁場の力線は閉曲線になっていて、 $\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0$ であるから、 $\mu_0 \mathbf{H}$ をベクトルポテンシャル \mathbf{A} の回転として

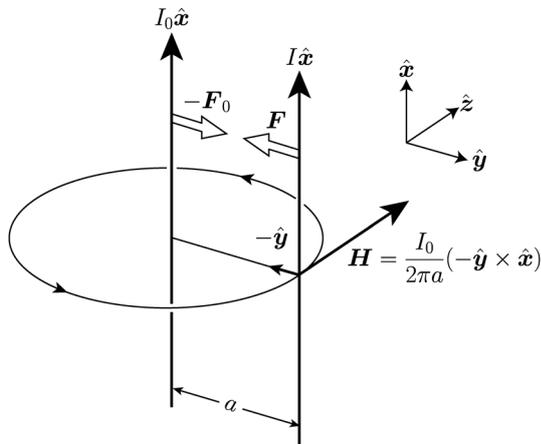


Fig. 4 Force acting between parallel electric currents separated with a distance a .⁴⁾

$$\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (47)$$

と表すことができる。式(46)の両辺を μ_0 倍して代入すれば

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (48)$$

となる。(48)の関係を与える \mathbf{A} は一義的に定まらない。任意のスカラー場の勾配を加えても式(48)の関係は成り立つ。そこで

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (49)$$

という条件を課して、この任意性を取り除いておく。そうすると

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (50)$$

というポアソン方程式が得られる。この解は、静電スカラー場のポアソン方程式の解と同様に

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dV \quad (51)$$

と与えられる⁵⁾。位置 \mathbf{r} におけるベクトルポテンシャルを求めるためには、全空間を流れる電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{R})$ を、距離 $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ で割って、 \mathbf{R} に関して体積積分しなければならない。これは電流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{R})$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の一般的な関係である。

閉回路を流れる電流がこの回路から十分離れた場所につくるベクトルポテンシャルを考えよう。閉回路の中心を原点にとれば $R \ll r$ の条件が成立する。

$$d := |\mathbf{R} - \mathbf{r}| = r \left(1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \dots \right) \quad (52)$$

と展開して、これを(51)に代入し、ベクトルポテンシャルは電流の大きさを I として

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{R}}{d} \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint \left(1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right) d\mathbf{R} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (53)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{R} &= -\oint (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{R}) \mathbf{R} \\ &= \frac{1}{2} \oint [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{R} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{R}) \mathbf{R}] \\ &= \frac{1}{2} \oint (\mathbf{R} \times d\mathbf{R}) \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (54)$$

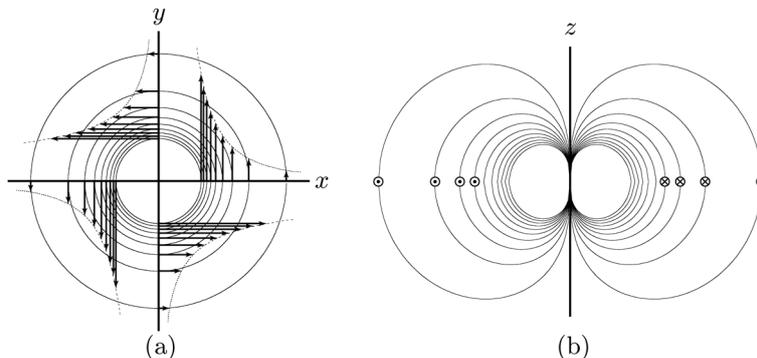


Fig. 5 (a) Vector potential, \mathbf{A} , produced by a magnetic moment $m = (0, 0, m)$ at the origin $(0, 0, 0)$. \mathbf{A} rotates around the z axis. (b) Contour lines of $|\mathbf{A}|$ in zx -plane; $z^2 + x^2 = (x/C)^{2/3}$; $C = 4\pi |\mathbf{A}| / \mu_0 m$.⁷⁾

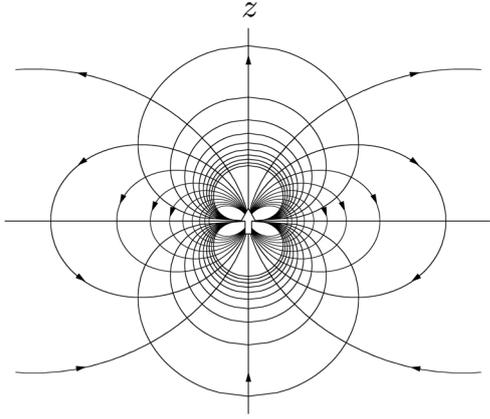


Fig. 6 Magnetostatic potential, φ_m , and magnetic field, H_m , produced by a magnetic moment $m=(0, 0, m)$.⁸⁾

の関係がある⁶⁾。これに磁気モーメントの表式 (34) を代入して、原点から \mathbf{r} だけ離れた位置におけるベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (55)$$

となる。これは \mathbf{m} を軸として、これを取り巻いた円周方向を向いている。 $\mathbf{A}_m(\mathbf{r})$ の様相を Fig. 5 に示した。

磁気モーメントを閉電流として定義したことによって、これから十分離れた場所でのベクトルポテンシャルを、磁気モーメントをあからさまに含んだ形で表すことができた。ここでは $R \ll r$ と近似できる場合について扱い、計算を見やすくしたが、電流ループによるベクトルポテンシャル式 (55) は近似を用いなくても楕円積分を用いれば厳密に数学的に導出できる。

1.5 磁気モーメントによる磁束密度

一般に磁束密度 \mathbf{B} を表す力線は始点も終点もない曲線となる。これは単一の磁極が存在しないことから導かれる物理法則である。ここで、磁束の力線の密度を表すベクトル場として磁束密度 \mathbf{B} を導入する。磁気モーメントから離れた場所では $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。 \mathbf{B} には発散がないから

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (56)$$

であり、したがって \mathbf{B} をベクトルポテンシャル \mathbf{A} の回転として、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (57)$$

と表すことができる。

前節で磁気モーメントがその周囲につくるベクトルポテンシャル式 (55) がわかったから、この回転をとって磁束密度を求めれば

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m &= \nabla \times \mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \mathbf{m} \end{aligned} \quad (58)$$

と計算される。最右辺第1項に含まれる

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) =: \varphi_m \quad (59)$$

は磁気モーメントによる磁気ポテンシャルである。後で述べるように、第2項は原点以外の点では0となる。原点以外では、磁気ポテンシャルの勾配にマイナスをつければ磁場の強さとなる。すなわち

$$\mathbf{H}_m = -\nabla \varphi_m = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (60)$$

が磁気モーメントがつくる磁場である。磁気ポテンシャルと磁場の様相を Fig. 6 に示した。この磁場は電気双極子がつくる電場と同様な空間分布をしているので双極子磁場と呼ばれることもあるが、磁気モーメントは磁荷の双極子ではないことはすでに述べた。

ところで磁気ポテンシャルという、スカラーポテンシャルの勾配として得られるベクトル場の回転は数式上ゼロ、すなわち

$$\nabla \times \nabla \varphi_m = 0 \quad (61)$$

である。しかしアンペールの発見した物理法則によれば、磁場の周回積分はその閉曲線を貫く電流密度 \mathbf{J} の面積分に等しい。ストークスの定理により磁場のベクトル場の回転は電流密度ベクトルを与える。すなわち $\nabla \times \nabla \varphi_m = -\mathbf{J}$ となってしまう式 (61) に矛盾する。したがって磁気ポテンシャルが定義できるのは、電流の流れていない $\mathbf{J} = 0$ の場所のみであるとしなければならない。空間に切れ目を入れて、電流の流れている部分を取り除いた単連結の領域のみで磁気ポテンシャルは定義される。

式 (37) において磁気モーメント \mathbf{m} は、電流ループを原点に収束させて定義している。したがってこの場合、磁気ポテンシャルは原点を除いて定義されている。すなわち式 (60) は原点を除いた領域で成り立つと考えるべきである。

式 (58) の右辺第2項は原点を除けば $r \neq 0$ であるから

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \left(\frac{3}{r^3} \right) - \left(\frac{3}{r^5} \right) (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (62)$$

となり、寄与はない。しかしこの項は原点 $r=0$ で意味を持ってくる。原点を中心とする球について積分を行えば、ガウスの定理により

$$\iiint \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV = \iint \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \quad (63)$$

であるから、 δ 関数を用いて

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \mathbf{m} = \mu_0 \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \quad (64)$$

と書くことができる。ここで δ 関数 $\delta(\mathbf{r})$ とは $\mathbf{r} \neq 0$ であれば

$\delta(\mathbf{r})=0$ であるが、 $\mathbf{r}=0$ を内部に含んで体積積分をしたとき

$$\iiint \delta(\mathbf{r})dV = 1 \quad (65)$$

となる関数である。

以上をまとめると、原点に局在した磁気モーメントが位置 \mathbf{r} につくる磁束密度は

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) + \mu_0 m \delta(\mathbf{r}) \quad (66)$$

と書くことができる。右辺第1項は式(60)で与えられる磁場の μ_0 倍であるが、それだけでなく第2項が付け加わることが重要な意味をもってくる。閉電流を原点に収束するという極限操作によって、式(66)の第2項が現れた。

ここで振り返ってみると、最初ベクトルポテンシャルを求める際に、簡単のため閉電流から離れた場所 ($r \gg R$)における近似で導入したが、得られた結果式(55)は、この近似をはずしても正しい。そこで原点を除いて \mathbf{H}_m を与える式(60)を拡張して、閉電流を収束させた原点を含めて \mathbf{B}_m を定義すると、式(66)の第2項が現れた。このように原点を含めた全空間でベクトルポテンシャルを定義することによって、その回転として式(58)によって磁束密度ベクトル \mathbf{B} が全空間で定義された。このように式(58)を全空間で成り立たせることによって式(66)の右辺第2項が現れ、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の成立が保障されたのである。

1.6 磁化とマクスウェルの方程式

まず物質が存在しない、すなわち電荷も電流も磁気モーメントもない真空空間の領域内のみで考えよう。また後述の理由で、真空中の場に対しても、 \mathbf{E} と \mathbf{H} を用いて記述する。任意の閉曲線を考えたとき、「この閉曲線に沿った電場 \mathbf{E} の線積分は閉曲線を貫く磁場 \mathbf{H} の面積分の時間変化に比例する。閉曲線に沿った磁場 \mathbf{H} の線積分は閉曲線を貫く電場 \mathbf{E} の面積分の時間変化に比例する」というのが定性的な電磁気学の基本法則である。物理量の単位と符号を定めれば、これらは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\mu_0 \frac{d}{dt} \iint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (67)$$

ストークスの定理を用いて局所的な形に書けば

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (68)$$

となる。式(68)の発散をとれば、左辺の回転の発散はゼロであるから、場の発散の時間変化がないことがわかる。そこに初期条件として

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (69)$$

を付け加えれば、これは時間変化しない。このように真空領域のマクスウェル方程式は、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} が絡み合った、対称性の良い形をしている。式(68)の回転をとって、式(69)を代入して組み合わせれば、波動方程式が得られ

る。これらは位相速度として光速

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (71)$$

をもった平面波（電磁波）

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad (72)$$

を解としてもつ。式(72)を式(70)に代入すれば $\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = k^2$ を得る。ここで、位相速度は $\omega/k = c$ であるから

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (73)$$

の関係を得る。

さて次に電場、磁場の源となる電荷と電流、磁気モーメントを導入する。まず簡単のため点電荷、局在化した磁気モーメントが原点にある場合を考えよう。そのまわりにはそれぞれ、静電スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル式(55)ができる。ベクトルポテンシャルの回転をとれば、磁束密度が式(66)のように導かれる。

さて、ここから空間の場に関する物理量に関して新たな定義を導入する。位置 \mathbf{r} の周りに微小体積 ΔV を考え、場に関する物理量をこの中で体積平均してその平均値を改めて位置 \mathbf{r} における場の物理量と考えるのである。ここで ΔV をどのくらいの大きさ取るかは、考える問題による。物質を含む空間においては、体積平均の領域の中に多数の原子を含み、 ΔV を変えても平均値がほとんど変化せず、位置の連続関数としてなめらかで微分演算が可能となるようなとり方をする。

具体的に式(66)の右辺第2項について述べると、 \mathbf{R}_j の位置に磁気モーメント \mathbf{m}_j が存在していたとすれば、多数の磁気モーメントを含む領域に関する体積平均として

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_j \mathbf{m}_j \\ &= \frac{1}{\Delta V} \iiint \sum_j [m_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j)] dV \end{aligned} \quad (74)$$

が定義される。このベクトル \mathbf{M} は磁化ベクトルと呼ばれる。外部から加えた磁場がなくても有限の大きさの磁化ベクトルをもつ物質は強磁性体と呼ばれる。式(66)の $\mathbf{B}_m(\mathbf{r})$ と $\mathbf{H}_m(\mathbf{r})$ も体積平均したベクトル \mathbf{B}_M と \mathbf{H}_M にそれぞれ置きかえれば、

$$\mathbf{B}_M = \mu_0 \mathbf{H}_M + \mu_0 \mathbf{M} \quad (75)$$

の関係を得る。式(56)で $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ とおいたことを思い起こせば、上式の両辺の発散をとればゼロである。したがって

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (76)$$

である。磁場 \mathbf{H}_M は磁化 \mathbf{M} が消失した所から湧き出し、 \mathbf{M} が発生したところに吸い込まれる。内部が一様な磁化をもつ強磁性体では、磁化の存在しない外部との境界において磁化は消失、発生するから、磁場もそこで内外に発生、または内外の磁場が吸い込まれる。もちろんこの場合の磁場 \mathbf{H}_M は式(60)ではなくて、これを体積平均した

$$\mathbf{H}_M = \frac{1}{\Delta V} \iiint \mathbf{H}_m dV \quad (77)$$

である。細かい変化は平均化されるから、これがなだらかになるのは当然であるが、強磁性体の外形が楕円体の場合、内部の磁化が一様であれば \mathbf{H}_M も一様な反磁場となる。

外部から \mathbf{H}_M 以外の磁場 \mathbf{H}_{ex} がかけられていれば、それに応じた磁束密度は

$$\mathbf{B}_{ex} = \mu_0 \mathbf{H}_{ex} \quad (78)$$

である。両者を加えて、一般に $\mathbf{B} = \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_{ex}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_M + \mathbf{H}_{ex}$ と置けば

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (79)$$

である。このようにして磁束密度と磁場、磁化との関係が導かれた。これらはすべて適当な微小体積 ΔV の中でベクトル平均をとった量であることを忘れてはならない。

国際単位系(SI)では磁束密度 \mathbf{B} の単位はT(テスラ)である。磁場 \mathbf{H} , 磁化 \mathbf{M} の単位はともにA/mである。磁性体を扱う場合、 \mathbf{M} を \mathbf{H} の関数として、磁化曲線を取り扱うことが中心的課題となる。このとき \mathbf{H} ではなくて式(79)の磁束密度 \mathbf{B} を用いることはできない。本稿では $\mu_0 \mathbf{H}$ と書くべき場合は \mathbf{B} を用いない。 \mathbf{B} を用いるときは \mathbf{M} と \mathbf{H} がそれぞれ明確でなければ混乱を招く。

物質を含んだ空間における体積平均した物理量で記述された電磁気学の基本法則には、電荷密度 ρ , 電流密度ベクトル \mathbf{J} , 電気分極ベクトル \mathbf{P} , 磁化ベクトル \mathbf{M} が現れる。ここで電束密度ベクトル

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (80)$$

と式(79)の磁束密度ベクトル $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ を用いて、マクスウェルの方程式を簡潔だが形式的な形で書けば

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (81)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (82)$$

となる。(79), (80)を比較して、 $\mathbf{P}_m := \mu_0 \mathbf{M}$ を磁気分極と呼んで導入し、形式的な対応を試みる人もいる。しかし磁気を電気とのアナロジーで説明しようとしても、正しい理解には到達しない。磁気モーメントは必ず角運動量を伴って現れるのに対して、電気双極子は正負の電荷の対で、角運動量とは関係がない。誘電体を学んでも、磁性体の勉強をないがしろにすることはできない。

マクスウェルの方程式において \mathbf{B} と \mathbf{D} は決して対称な格好には現れていない。そこであえて \mathbf{B} と \mathbf{D} を用いずに、物質があるとき現れる物理量をあからさまに用いてマクスウェルの方程式を書けば

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (83)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (84)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 c^2 (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (85)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (86)$$

となる。真空中での法則式(68), (69)との違いが明瞭に理解できるであろう。なお式(73)の関係を ϵ_0 を消した。式(84)の発散をとれば

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (87)$$

となる。これに式(85)を代入して、電荷保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (88)$$

を導くことができる。

References

- 1) 溝口 正:「電磁気学—SI UNITS—」(裳華房, 2001年, p. 141, 図14.1)から転写。
- 2) 溝口 正:「磁気と磁性I」(応用物理学選書, 培風館, 1995年, p. 47, 図2.1.4および図2.1.5)から転写。
- 3) 溝口 正:「磁気と磁性I」(応用物理学選書, 培風館, 1995年, p. 55, 図2.3.1)から転写。
- 4) 溝口 正:「電磁気学—SI UNITS—」(裳華房, 2001年, p. 120, 図11.1)から転写。
- 5) 溝口 正:「電磁気学—SI UNITS—」(裳華房, 2001年, p. 181)参照。
- 6) 溝口 正:「電磁気学—SI UNITS—」(裳華房, 2001年, pp. 186–187)参照。
- 7) 溝口 正:「磁気と磁性I」(応用物理学選書, 培風館, 1995年, p. 48, 図2.1.6)から転写。
- 8) 溝口 正:「電磁気学—SI UNITS—」(裳華房, 2001年, p. 147, 図14.4)から転写。

(2018年4月20日受理)

溝口 正 みぞぐち ただし (1937–2014)

1961年 東京大学理学部物理学科卒業, 1966年 同大学院博士課程修了, 理学博士, 同年 東京大学物性研究所磁気I部門助手, 学習院大学理学部物理学科助教授, 同教授, 同名誉教授を歴任。

2014年7月23日 死去。

専門 物性物理学, 磁性物理学

・原稿の内容に関するご連絡先

高木 康夫 日鉄住金テクノロジー株式会社

Y. Takagi, Nippon Steel & Sumikin Technology Co., LTD.

E-Mail: takagi-yasuo@nsst.jp